Geometria

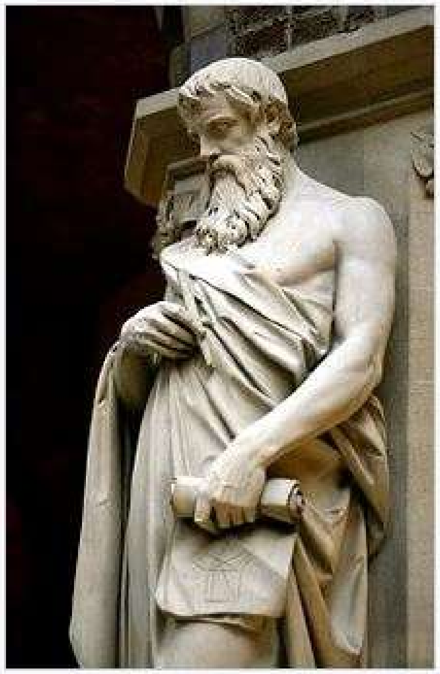
8 Lezioni dal 18 ottobre al 13 Dicembre 2024
UTE San Giuliano Milanese
Sergio SOLIMENA

INDICE 5

La Geometria Euclidea: gli elementi

- Postulati, Assiomi e Teoremi
- Il V Postulato
  - Esempi di dimostrazione
    - Teorema delle rette distinte
    - I Criterio di uguaglianza dei triangoli
    - Le rette parallele
    - Gli angoli al centro
    - Triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza

Euclide



Statua di Euclide posta nel museo di storia naturale dell'università di Oxford.

Euclide (in greco antico: Εὐκλείδης, *Eukléidēs*; IV secolo a.C. – III secolo a.C.) è stato un matematico e filosofo greco antico. Si occupò di vari ambiti, dall'ottica all'astronomia, dalla musica alla meccanica, oltre, ovviamente, alla matematica. Euclide è menzionato da Proclo, che lo colloca tra i più giovani discepoli di Platone.

Dati sintetici

Matematico e scienziato greco

DATA DI NASCITA

Anno di nascita: 323 A.C.

DATA DI MORTE

Anno di morte: 283 A.C. (a 40 anni)

I 5 Postulati di Euclide

Gli «*Elementi*» sono il suo lavoro più noto, è una delle più influenti opere di tutta la storia della matematica

I Postulato: Per due punti distinti del piano passa una e una sola retta.

II Postulato: Una linea retta può essere prolungata indefinitamente

III Postulato: Dato un punto e una lunghezza si può descrivere una circonferenza

IV Postulato: Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro.

Questi primi 4 postulati costituiscono la *Geometria Assoluta*.

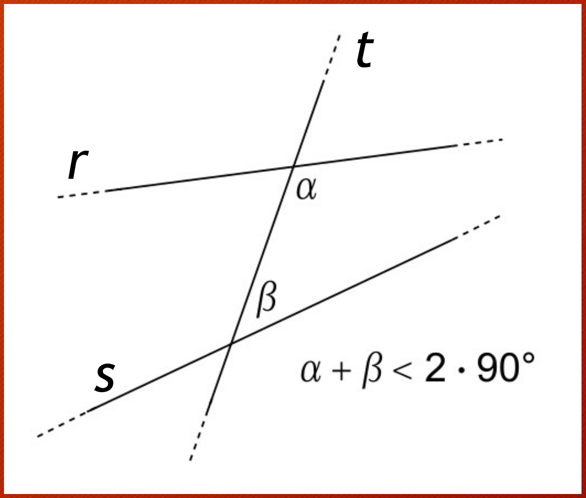
Si possono verificare con riga e compasso.

I 5 Postulati di Euclide

Aggiungendo il *V Postulato* alla *Geometria Assoluta* si definisce la *Geometria Euclidea*

V Postulato: se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

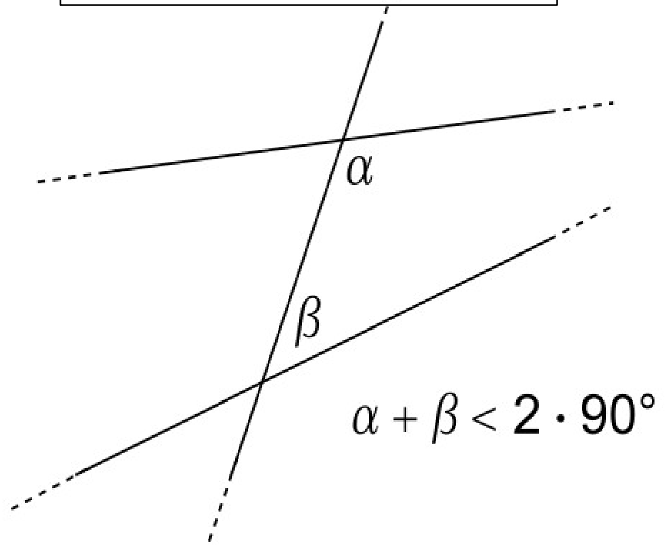
PO. Postulato dell'obliqua



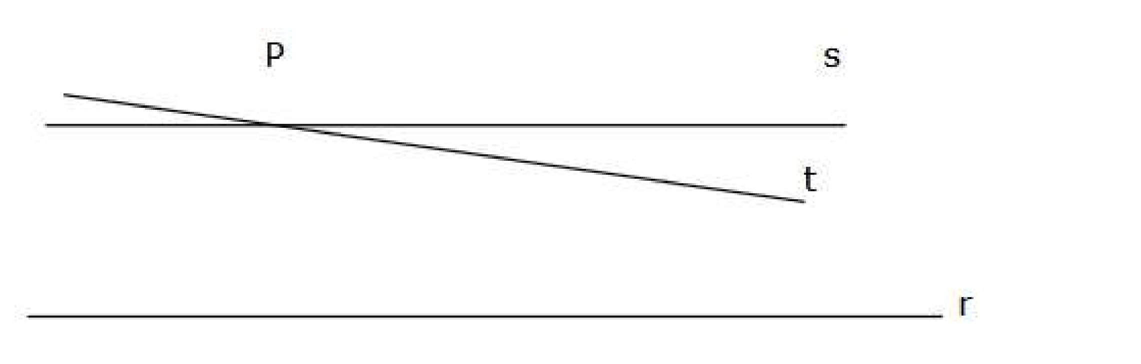
V Postulato

Alcune formulazioni equivalenti al V postulato

PO. Postulato dell'obliqua



Postulato dell'unicità (PU): per un punto P esterno ad una retta passa una sola retta parallela alla retta data «r».



Geometria assiomatica

La geometria Euclidea consiste nell'assunzione di cinque semplici e intuitivi concetti, detti *assiomi* o *postulati* e, nella derivazione da detti assiomi, di altre proposizioni (*teoremi*) che non abbiano alcuna contraddizione con essi.

I Postulati o Assiomi

Sono delle Proposizioni che si accolgono come Vere senza alcuna Dimostrazione, perché ritenute evidenti

Teorema

Ogni teorema è costituito da tre parti principali: le *ipotesi* (i dati di partenza, che non si possono contraddire), la *tesi* (ciò che si deve dimostrare) e la *dimostrazione* (l'insieme di tutti i ragionamenti utilizzati per confermare, o smentire, la tesi)

Concetto di verità in geometria

Le proposizioni in geometria sono VERE solo nei due seguenti casi:

1) sono Postulati o Assiomi.
2) sono Teoremi

Dopo la scoperta delle geometrie non euclidee la verità geometrica e la realtà non sempre coincidono.

Teoremi e Postulati possono scambiarsi tra loro.

Teoremi della Geometria Euclidea

GEOMETRIA EUCLIDEA= GEOMETRIA ASSOLUTA + V° POSTULATO

GEOMETRIA ASSOLUTA

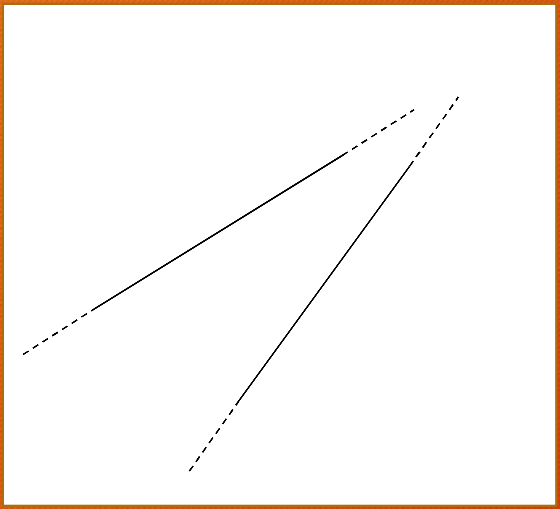
- Dimostrazione di rette incidenti o parallele
- Dimostrazioni dell'esistenza dei triangoli isosceli ed equilateri
- Dimostrazione del I, II, III criterio di uguaglianza dei triangoli
- Dimostrazione che l'angolo esterno di un triangolo è maggiore degli angoli interni non adiacenti

Geometria Euclidea

- Dimostrazioni sull’uguaglianza degli angoli formati dalle rette parallele
- Dimostrazione che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°
- Dimostrazione che l’angolo al centro è doppio dell’angolo alla circonferenza
- Dimostrazione che il triangolo inscritto in una semi circonferenza è rettangolo

Dimostrazioni nella geometria Euclidea (Geometria Assoluta)

Teorema1: Due rette distinte, giacenti in un piano, si incontrano al più in un punto



Ipotesi: le due rette sono distinte

Tesi: le due rette si incontrano al più in un punto

Dimostrazione: Le due rette, essendo distinte, non possono avere due (o più) punti in comune perché, in tal caso, coinciderebbero in base all'assioma 1. Quindi due rette distinte possono avere al massimo un punto in comune.

Corollario (conseguenza diretta di un teorema):
Dal teorema segue che date due rette distinte nel piano ci sono solo due possibilità:
1) le rette sono parallele e non hanno alcun punto in comune.
2) le rette sono incidenti e hanno un solo punto in comune

Esistenza dei triangoli isosceli e equilateri (Geometria Assoluta)

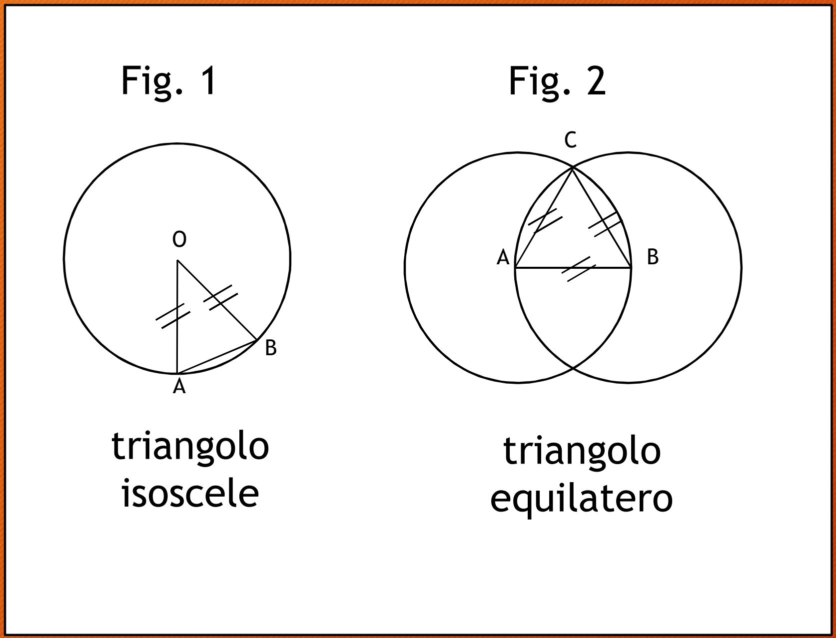
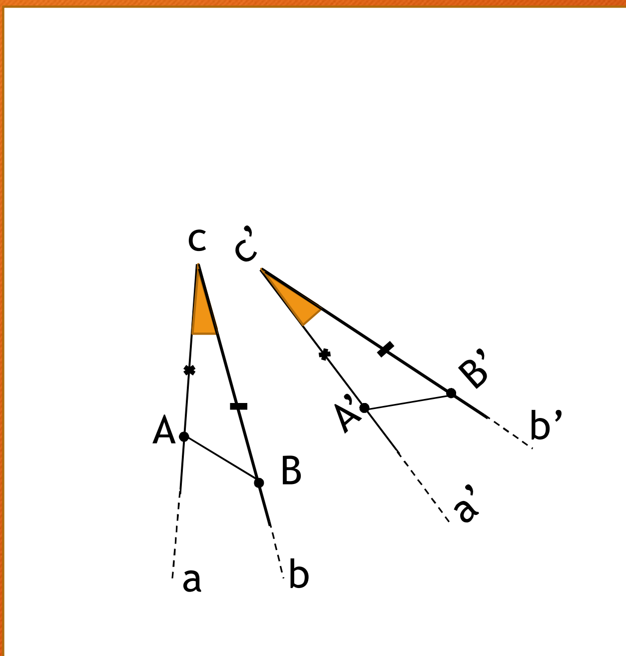


Fig.1: Dal primo postulato e dal terzo discende che è possibile costruire un triangolo con due lati uguali, definito triangolo isoscele

Fig.2: Dal primo postulato costruito il segmento AB e poi tracciate le due circonferenze di centri A e B e di raggio di lunghezza AB, per il terzo postulato, si determina il punto C, punto di incontro delle due circonferenze. Per costruzione i segmenti AB, AC e BC sono tutti raggi di circonferenze uguali e quindi sono uguali tra loro. Il triangolo ABC ha dunque 3 lati uguali, definito triangolo equilatero.

I criterio di uguaglianza dei triangoli (Geometria Assoluta)



Teorema: Primo Criterio di uguaglianza dei triangoli
(*Proposizione 4 di Euclide*)

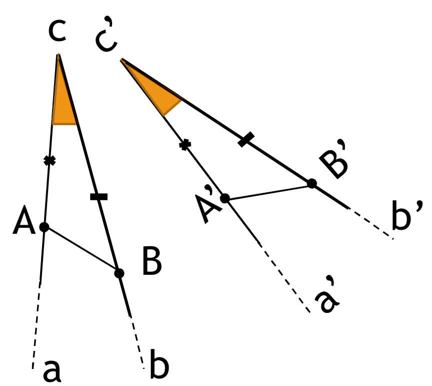
Se due triangoli hanno due lati e l'angolo fra essi compreso uguali, sono tra loro uguali

Ipotesi: CA = C'A'; CB = C'B'; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

Tesi: Uguaglianza dei triangoli, cioè $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

Dimostrazione: I criterio di uguaglianza dei triangoli

Teorema: Primo Criterio di uguaglianza dei triangoli



Ipotesi: Consideriamo due angoli uguali a^b = a'^b' e indichiamo con C e C' i loro vertici

Costruzione Prendiamo sulle simirette a e a' due punti A e A' in modo che
CA = CA'

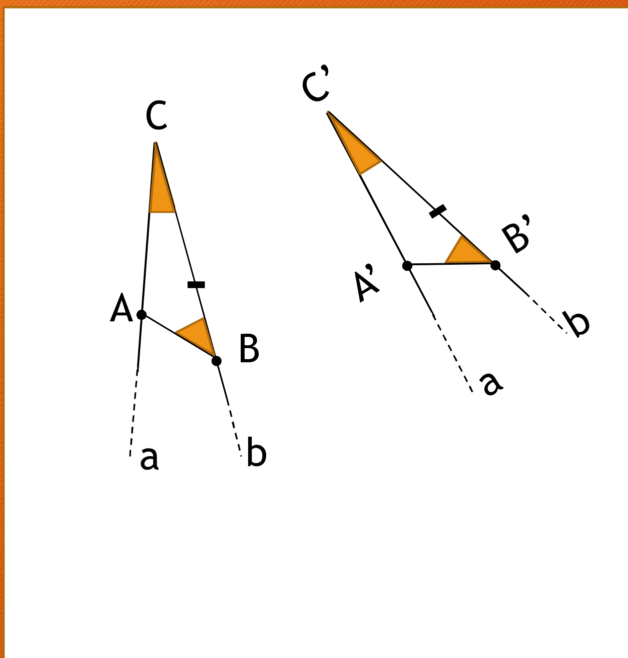
Costruzione Prendiamo sulle semirette b e b' due punti B e B' in modo che
CB = CB'

Congiungendo A con B e A' con B' si ottengono i triangoli ABC e A'B'C'

Dimostrazione: I due Triangoli sono uguali.

Poiché i due angoli uguali a^b e a'^b' sono uguali , essi sono sovrapponibili in modo che coincidano. Immaginiamo di far coincidere così i punti C con C', A con A' e B con B' i due triangoli vengono a coincidere e quindi sono uguali.

II criterio di uguaglianza dei triangoli (Geometria Assoluta)



Teorema: Secondo Criterio di uguaglianza dei triangoli (*Proposizione 26 di Euclide*)
Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due angoli e il lato tra essi compreso, allora sono congruenti.

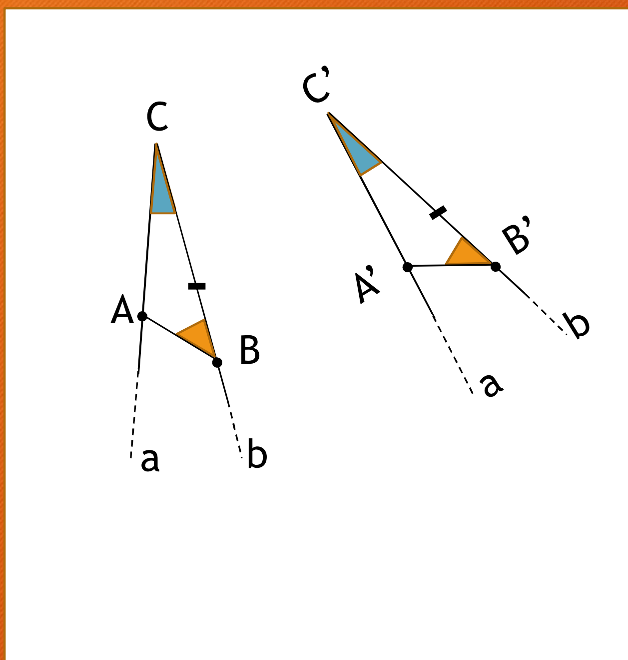
Ipotesi 1: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$; CB = CB'

Oppure

Ipotesi 2: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$
un lato non compreso tra tra i due angoli ma ugualmente posto rispetto ad uno di essi.

Tesi: I triangoli sono uguali, cioè $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

Dimostrazione del II criterio di uguaglianza dei triangoli (nell’ipotesi 1)

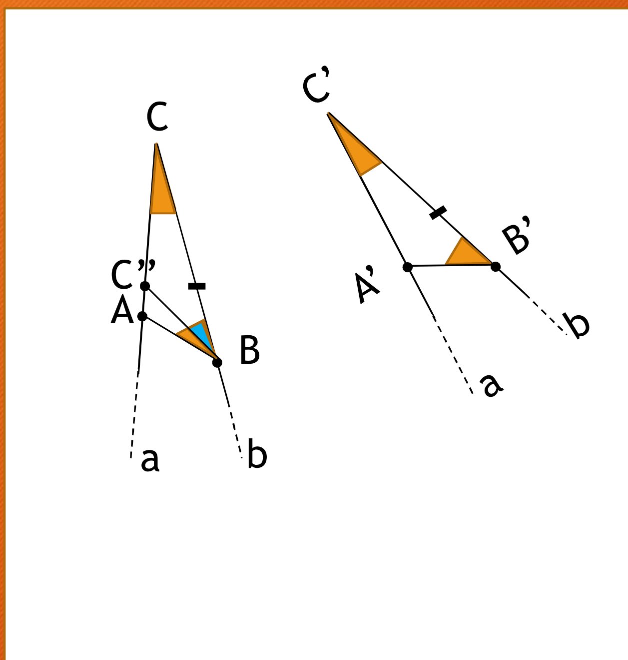


Ipotesi: CB = CB’; $\widehat{ABC}$ = $\widehat{A'B'C'}$; $\widehat{ACB}$ = $\widehat{A'C'B'}$

- Se CA = C’A’ allora i triangoli ABC e A’B’C’ sono uguali per il primo di criterio d’uguaglianza avendo due lati e l’angolo compreso uguali:

  CA=C’A’; CB = CB’; $\widehat{ACB}$ = $\widehat{A'C'B'}$

Dimostrazione del II criterio di uguaglianza dei triangoli



- Se CA > C'A' allora possiamo prendere un punto C'' sul lato CA tale che CC'' = C'A'

allora i due triangoli CC''B = C'A'B' per il primo criterio di uguaglianza avendo due lati e l'angolo compreso uguali:

$$CC'' = C'A';\ CB = CB';\ C''\widehat{C}B = A'\widehat{C'}B'$$

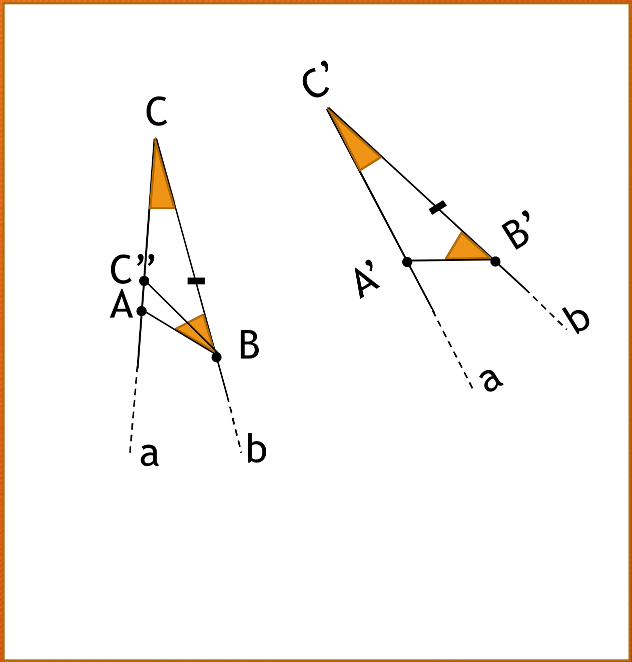
Quindi sono uguali gli angoli: $C''\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$
Ma dall'ipotesi sono anche uguali gli angoli $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$

e dunque: $C''\widehat{B}C = A\widehat{B}C$.

Questo è impossibile essendo $C''\widehat{B}C$ una parte di $A\widehat{B}C$

Allora la condizione CA > C'A' è falsa.
Si può dimostrare che anche CA < C'A' è falsa ripetendo lo stesso ragionamento sul triangolo A'B'C'

Il criterio di uguaglianza dei triangoli

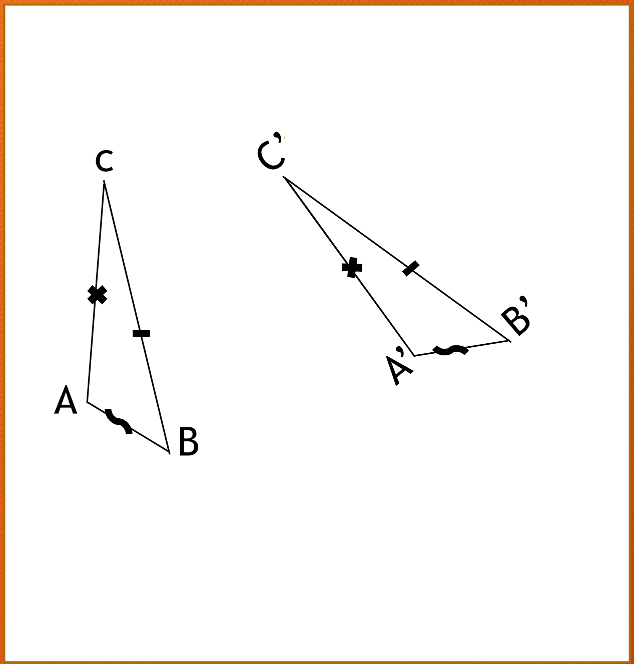


Allora se la condizione CA > C'A' è falsa e anche CA < C'A' è falsa l'unica possibilità è che CA = C'A'.

Torniamo così all'ipotesi 1 in cui si è dimostrato che i due triangoli sono uguali.

Si è così dimostrato che i due triangoli ABC e A'B'C' sono uguali

III criterio di uguaglianza dei triangoli (Geometria Assoluta)

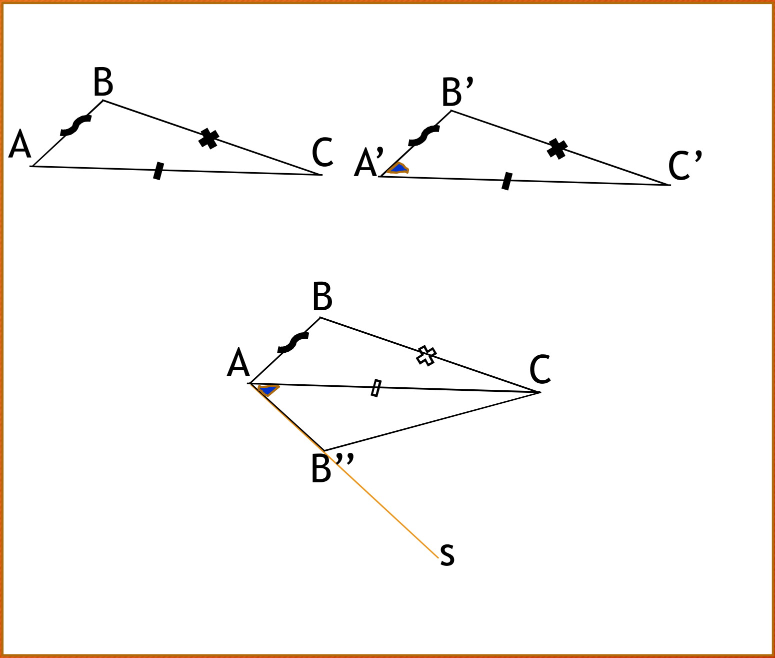


Teorema: Terzo Criterio di uguaglianza dei triangoli (*Proposizioni 7 e 8 di Euclide*)
Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti tutti e tre i lati, allora sono congruenti.

Ipotesi: AB=A'B' ; AC=A'C' ; BC=B'C'

Tesi: I triangoli sono uguali, cioè ABC=A'B'C'

Dimostrazione del III criterio di uguaglianza dei triangoli



Ipotesi: AB=A'B' ; AC=A'C' ; BC=B'C'

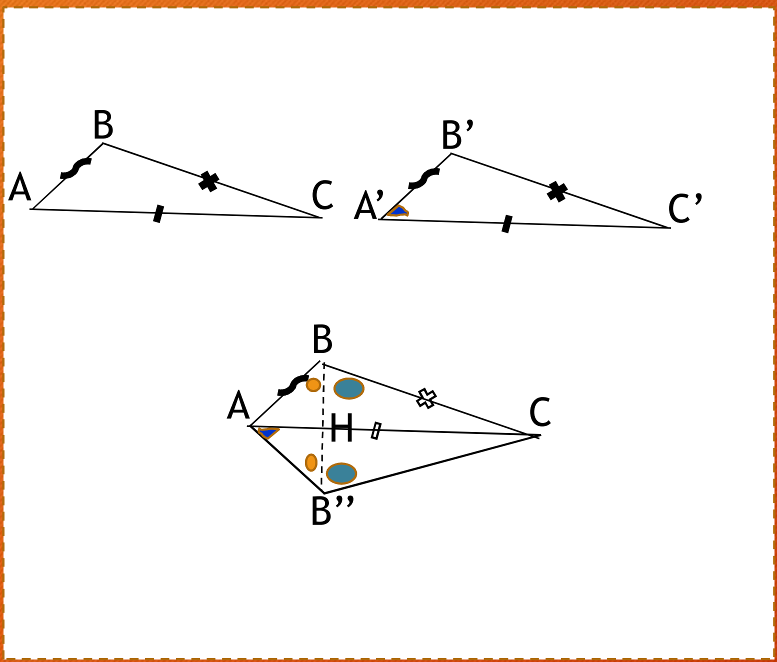
Tesi: I triangoli sono uguali, cioè ABC=A'B'C'

Costruiamo il triangolo: AB''C

Dal vertice A tracciamo una retta s che formi un angolo uguale a $B'\widehat{A'}C'$ con il lato AC, ma sul piano opposto a quello del triangolo ABC.
Prendiamo su tale retta un punto B'' tale che:
A'B'=AB''
Uniamo con un segmento il B'' con il punto C.

Risulta che i triangoli A'B'C' e AB''C sono uguali per il primo criterio di uguaglianza
A'B'=AB'' ; A'C'=AC ; $B'\widehat{A'}C' = B''\widehat{A}C$

Dimostrazione del III criterio di uguaglianza dei triangoli
(Geometria Assoluta)



Dall’uguaglianza segue che
$B'C'=B''C$ e dalle ipotesi $B''C=BC$, inoltre $A\widehat{B''}C=A'\widehat{B'}C$.

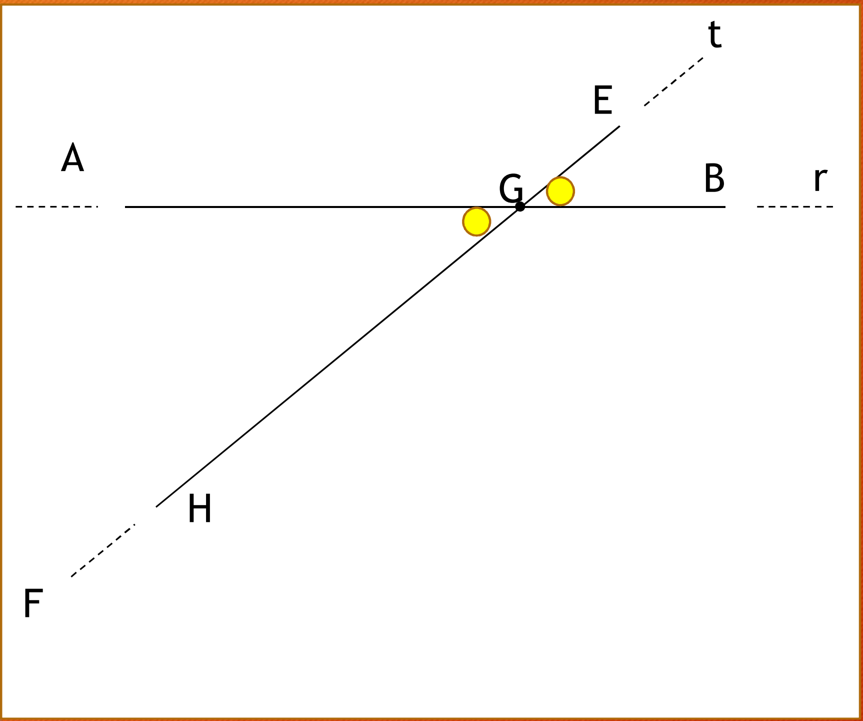
Tracciamo ora il segmento BB’’

Il segmento BB’’ incontrerà il lato AC in un punto H poiché i vertici B e B’’ giacciono su piani opposti rispetto ad AC.

I triangoli ABB’’ e BB’’C sono isosceli avendo i lati obliqui uguali:
$AB=AB''$ e $BC=B''C$ e poi sono uguali gli angoli alla base
$B\widehat{B''}A=B''\widehat{B}A$ e $C\widehat{B}B''=C\widehat{B''}B$

Quindi anche gli angoli $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{B''}C$ sono uguali perché somma di angoli uguali.
Segue che i triangoli $\overset{\triangle}{ABC}$ e $\overset{\triangle}{AB''C}$ sono uguali per il primo teorema. Infine per proprietà transitiva segue la tesi.

Teorema: Gli angoli opposti al vertice sono uguali Geometria Assoluta)

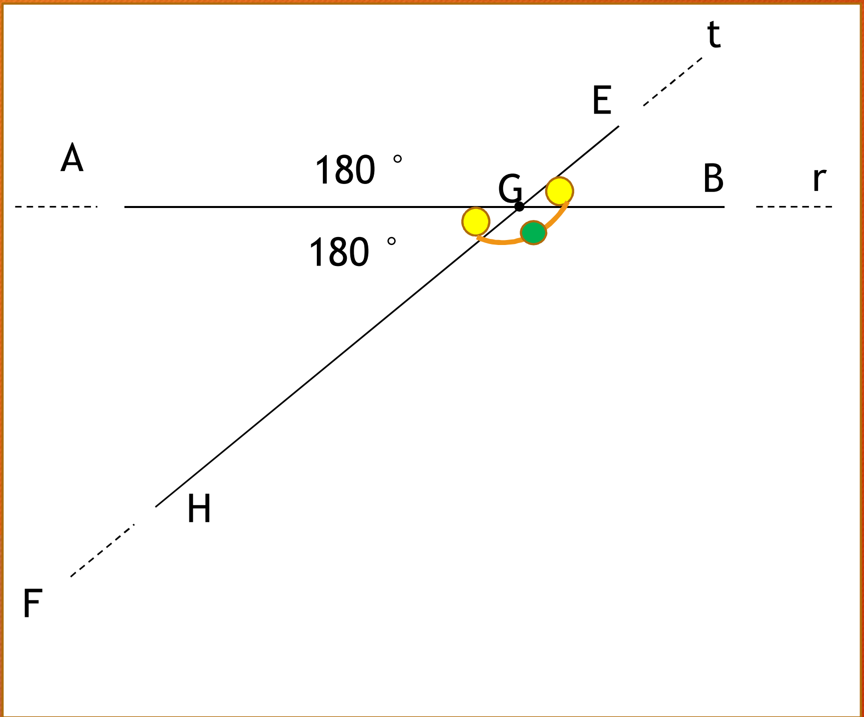


Gli angoli dello stesso colore sono uguali perché opposti al vertice

Teorema
Ipotesi: AGH angolo opposto al vertice G di EGB

Tesi: AGH = EGB

Dimostrazione: Gli angoli opposti al vertice sono uguali
(Geometria Assoluta)



Gli angoli dello stesso colore sono uguali perché opposti al vertice

Teorema

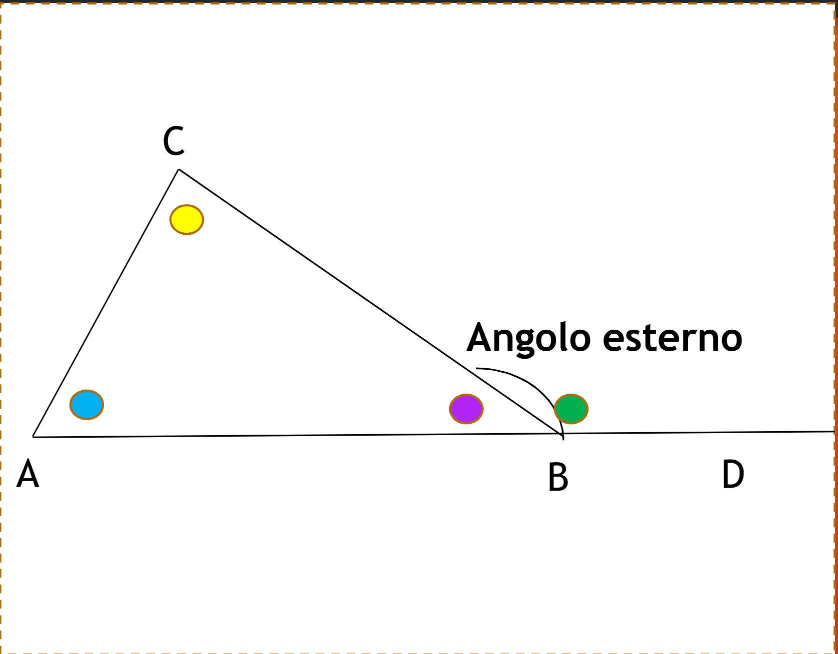
Ipotesi: AGH angolo opposto al vertice G di EGB

Tesi: AGH = EGB

Dimostrazione

AGH = EGB perché supplementari (180°)dello stesso angolo HGB

Teorema: L'angolo esterno ad un triangolo (Geometria Assoluta)

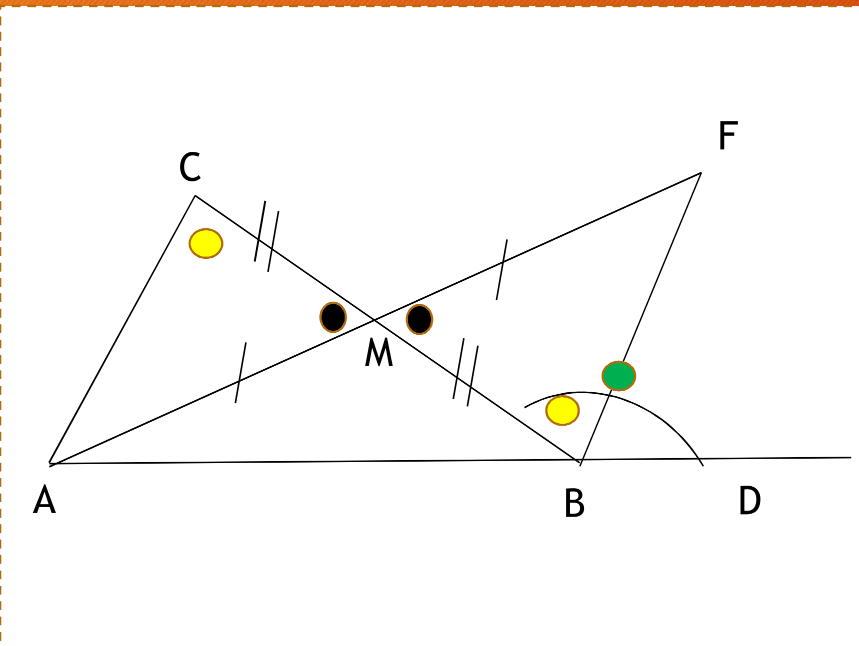


Teorema: L'angolo esterno ad un triangolo è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti

Ipotesi: ABC triangolo qualsiasi

Tesi: angolo CBD>BCA; angolo CBD>BAC

Dimostrazione: Sull’ angolo esterno ad un triangolo (Geometria Assoluta)



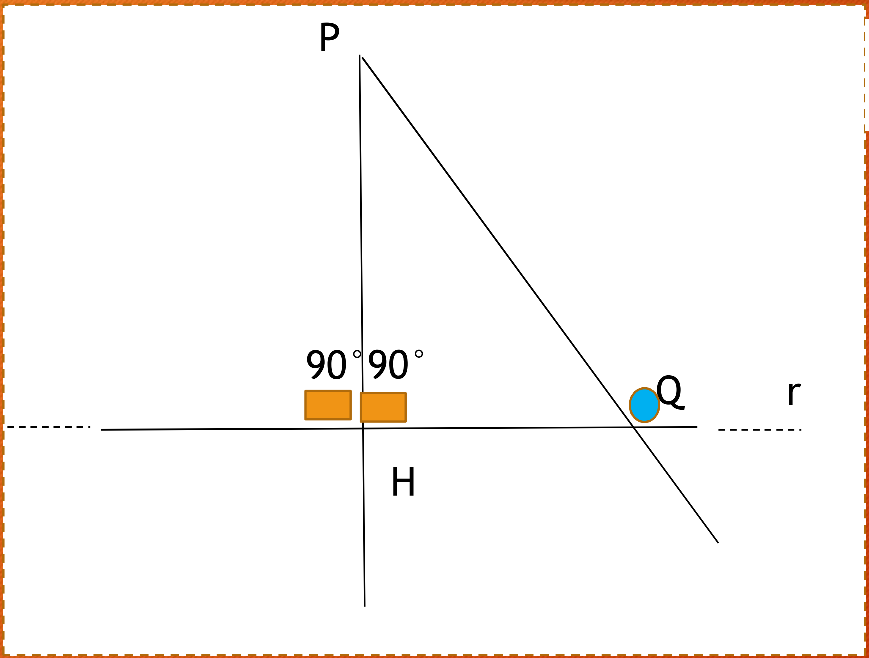
Dimostriamo che l’angolo CBD>BCA.

Sia M il punto medio del lato CB e tracciamo la retta passante tra A e M fino al punto F tale che AM=MF.
I due triangoli AMC e BMF sono uguali per il primo criterio di uguaglianza:
AM=MF per costruzione
CM=BM per costruzione
Angoli CMA=BMF uguali perché opposti al vertice.

Di conseguenza sono uguali gli angoli BCA=CBF.
Ma l’angolo CBF è interno all’angolo CBD e quindi vale la relazione tra gli angoli:
CBD>CBF=BCA che è la tesi da dimostrare.

Prendendo il punto M sul lato AB si dimostra ugualmente che l’angolo CBD>CAB

Teorema: Unicità della perpendicolare a una retta da un punto esterno P (Geometria Assoluta)



Teorema. Unicità della perpendicolare da un punto P ad una retta r

Costruzione:
Dal punto P tracciamo la perpendicolare alla retta r che si intersecano nel punto H

Dal teorema dell'angolo esterno, maggiore di qualsiasi angolo interno al triangolo e non adiacente, deriva la tesi.
Infatti qualsiasi retta diversa dalla perpendicolare incontra la retta r in un punto Q diverso dal punto H. Questa retta forma in Q un angolo esterno che deve essere maggiore dell'angolo interno retto e quindi non può essere una perpendicolare.

Il V Postulato di Euclide

Euclide è sempre stato molto dubbioso rispetto al quinto postulato, perché era convinto che fosse possibile derivarlo dagli altri quattro e, in definitiva, rimuoverlo dagli assiomi di base

La questione dell'indipendenza del quinto postulato dagli altri quattro tenne impegnate le più grandi menti matematiche per oltre **2000 anni.**

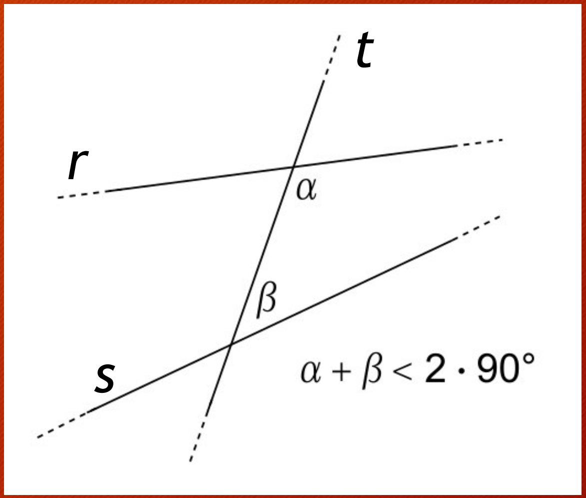
Padre Giovanni Girolamo Saccheri, un gesuita ligure, pubblicò nel **1733** poco prima di morire, una dimostrazione in cui si tentò di dimostrare per assurdo il quinto postulato supponendolo falso per poi ottenere una contraddizione. Fu un estremo tentativo per <liberare Euclide da ogni macchia>

Saccheri aprì le porte alle geometrie non euclidee.
Solamente nel 1828 Gauss segnò una svolta nell'indagine delle geometrie non euclidee le quali verranno infine formalizzate da **Riemann, Beltrami, Poincaré** e **Hilbert,**all'inizio del **1900**

Il V Postulato di Euclide

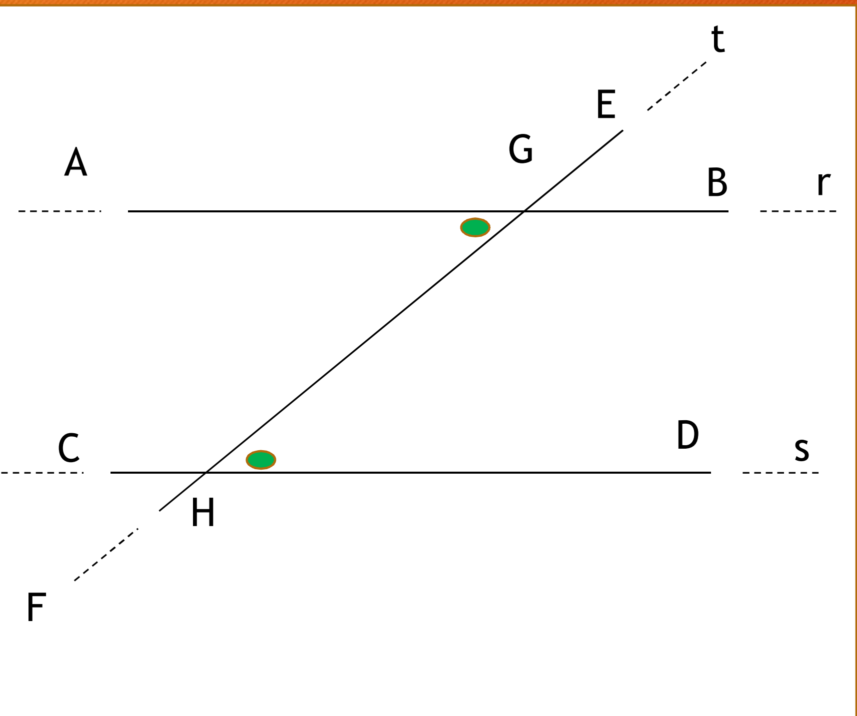
V Postulato: se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

PO. Postulato dell'obliqua



Aggiungendo il *V Postulato* alla *Geometria Assoluta* si definisce la *Geometria Euclidea*

I° Teorema sulle Rette parallele (Geometria Euclidea)



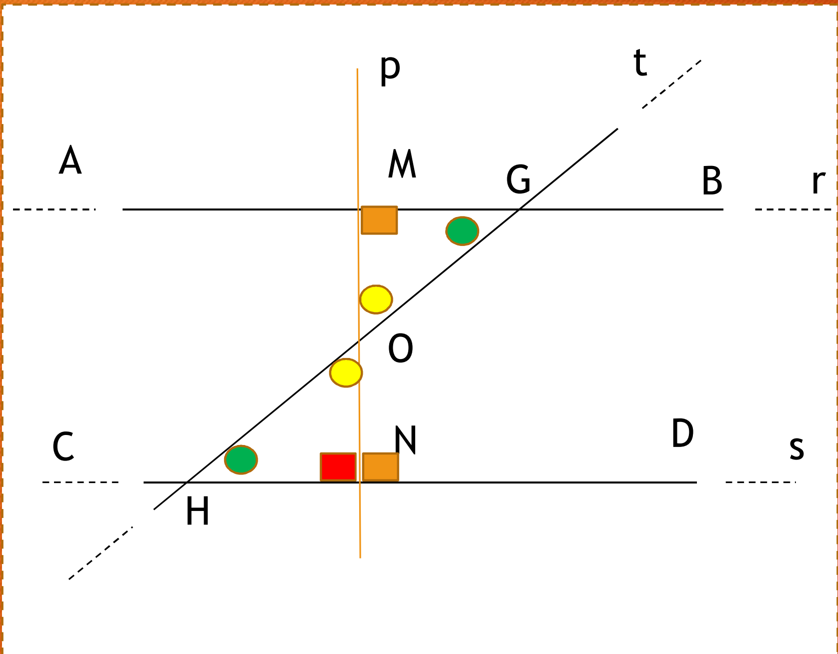
Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano parallele è che esse formino con una trasversale una coppia di angoli alterni interni uguali

Ipotesi: **AB//CD**

Tesi: **AGH = DHG**

Dimostrazione del I° Teorema sulle rette parallele: gli angoli alterni interni sono uguali



Dimostrazione che la condizione è necessaria

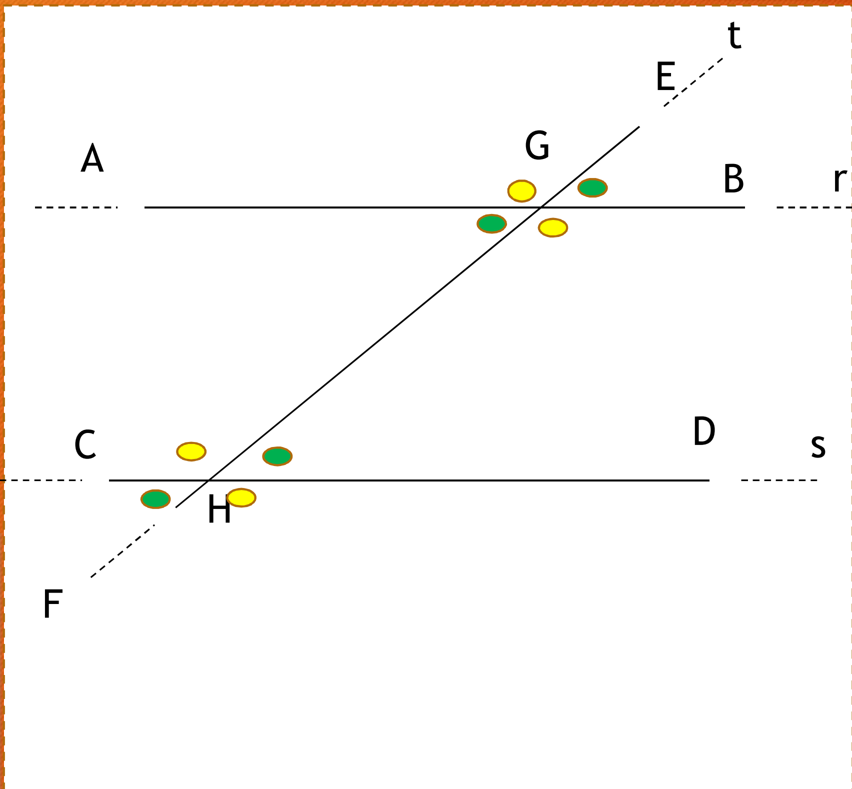
Ipotesi: AB//CD
Tesi: AGH = DHG

Consideriamo il punto O centro del segmento GH e la retta p perpendicolare ad AB passante per O.

La retta p è perpendicolare anche alla retta s per il V° postulato:
due rette parallele devono formare con la trasversale due angoli interni e dallo stesso lato, la cui somma è 180°

I due triangoli OMG e ONH sono rettangoli, hanno un angolo acuto opposto al vertice e le ipotenuse uguali, quindi sono uguali. Per il secondo teorema d'uguaglianza sono uguali da cui discende la tesi.

Nome degli angoli delle rette parallele



Nomi degli angoli e uguaglianze se r e s sono rette parallele

Angoli alterni

interni AGH = DHG; CHG = BGH

esterni BGE = CHF; AGE = FHD

Angoli coniugati

interni AGH con CHG; BHG con DHG

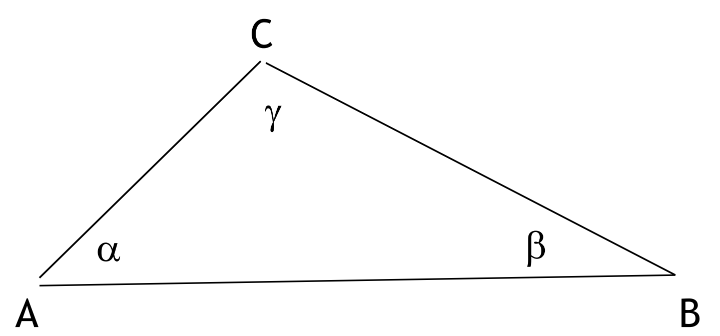
esterni AGE con CHF; BGE con FHD

Angoli Corrispondenti

AGE = CHG; BGE = DHG

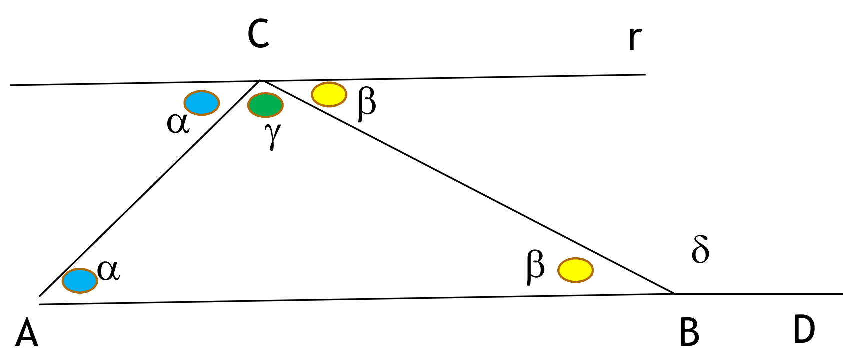
AGH = CHF; DHF = BGH

Teorema: Somma degli angoli interni di un triangolo (Geometria Euclidea)



Teorema. La somma degli angoli interni ad triangolo qualsiasi è sempre 180°

Dimostrazione: Somma degli angoli interni ad un triangolo (Geometria Euclidea)



Teorema. La somma degli angoli interni ad triangolo qualsiasi è sempre 180°

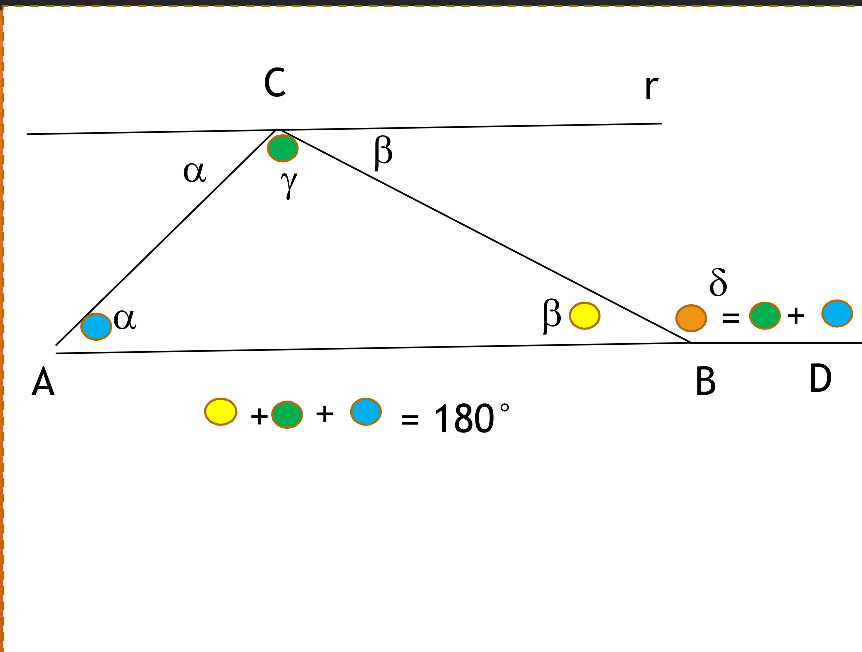
<u>Dimostrazione.</u>

Ipotesi: Triangolo ABC qualsiasi

Tesi: $\alpha + \beta + \gamma$ **=180°**

Dal punto C tracciamo la retta parallela al lato AB.
Per il teorema delle rette parallele si formeranno in C i due angoli alterni interni uguali ai due angoli del triangolo ABC sulla base AB. Come è evidente dalla figura la somma degli angoli è sempre 180°. La tesi è così dimostrata

Teorema sull’angolo esterno di un triangolo (Geometria Euclidea)



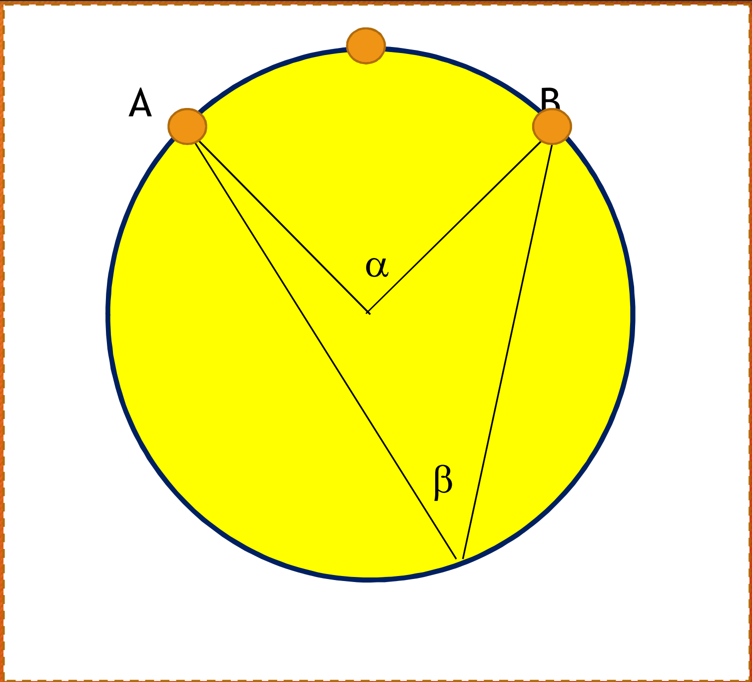
Corollario

L’angolo esterno δ forma con l’angolo supplementare interno β un angolo di 180°, cioè $\delta + \beta = 180°$.

Poiché anche $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ segue che $\delta = \alpha + \gamma$.

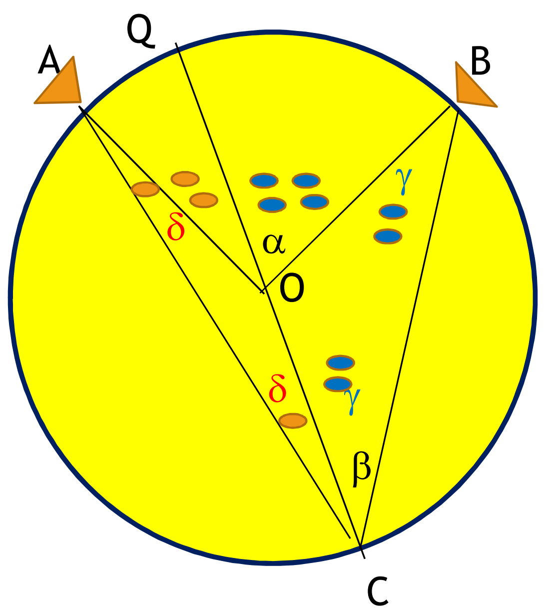
L’angolo esterno è sempre la somma dei due angoli interni non adiacenti.

Teorema sull'angolo al centro (Geometria Euclidea)



Teorema: **L'angolo al centro α, che insiste sull'arco di circonferenza AB è il doppio dell'angolo convesso alla circonferenza β che insiste sullo stesso arco**

Dimostrazione dell'angolo al centro



Ipotesi:

Angolo al centro α

Angolo alla circonferenza β

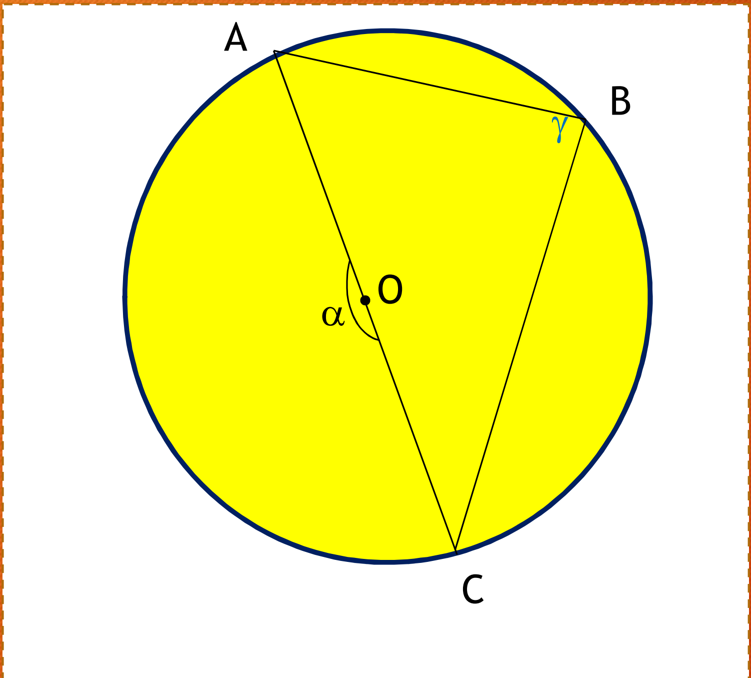
Tesi: $\alpha = 2\beta$

Dimostrazione:

Indichiamo con Q il punto diametralmente opposto a C, il vertice dell'angolo alla circonferenza.

Si formano così due triangoli isosceli AOC e BOC.
Il triangolo AOC ha alla base due angoli uguali δ, mentre BOC due angoli uguali γ. L'angolo alla circonferenza è la somma di $\beta = \delta + \gamma$
Mentre, osservando bene la figura, si nota che l'angolo al centro α è la somma dei due angoli esterni ai due triangoli.
Poiché ogni angolo esterno è la somma degli angoli interni non adiacenti si ha che $\alpha = 2*\delta + 2*\gamma = 2*(\delta+\gamma) = 2*\beta$, che è la tesi.

Teorema sul Triangolo inscritto in una semicirconferenza e rettangolo (Geometria Euclidea))



Corollario del teorema dell'angolo al centro

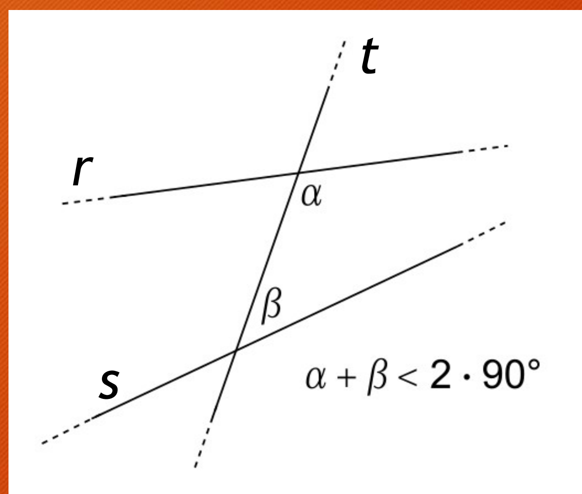
Il triangolo inscritto in una semicirconferenza è sempre un rettangolo

Dimostrazione:

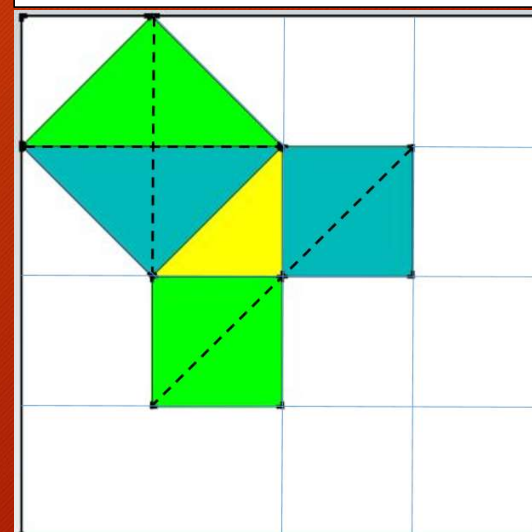
L'angolo alla circonferenza β ha come vertice B ed insiste sulla semicirconferenza
L'angolo al centro è l'angolo piatto α =180°
Quindi $\beta = \alpha / 2$ = 90° che è la tesi.

V Postulato e Teorema di Pitagora (Geometria Euclidea)

V Postulato
PO. Postulato dell'obliqua



Teorema di Pitagora
(*Proposizione 47 di Euclide*)



Utilizzato dalla Proposizione 29 in poi

Dimostrazione

Geometria Assoluta

P.29

Geometria Euclidea

Riassunto

Riassumiamo

Il V Postulato di Euclide

Il V postulato può essere sostituito dal teorema di Pitagora, o dal Teorema che dimostra che la somma degli angoli di un triangolo è sempre 180°.
Dopo questa sostituzione è possibile dimostrare il V postulato.

Perché è importante il V Postulato?

1) Senza il V postulato Euclide riesce a dimostrare solo le prime 28 Proposizioni (Teoremi)

2) Senza il V postulato non è valido il teorema di Pitagora

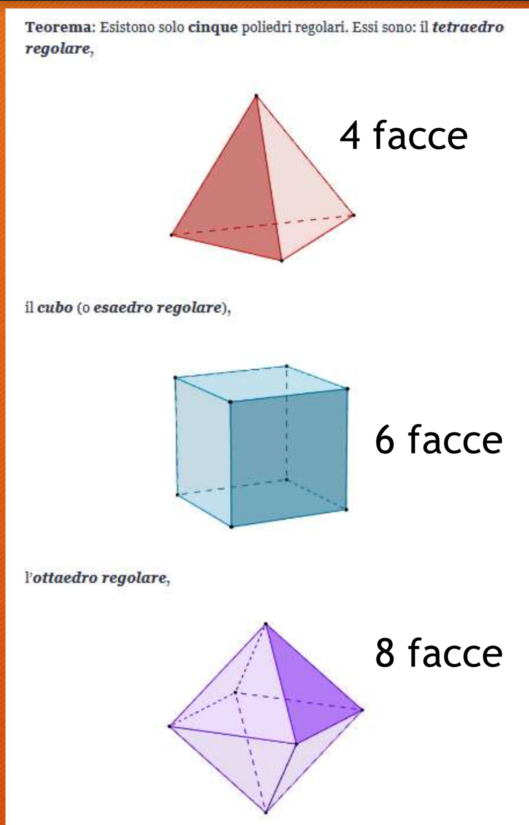
3) Senza il V postulato Euclide non è vero che la somma degli angoli interni di un triangolo sia 180°

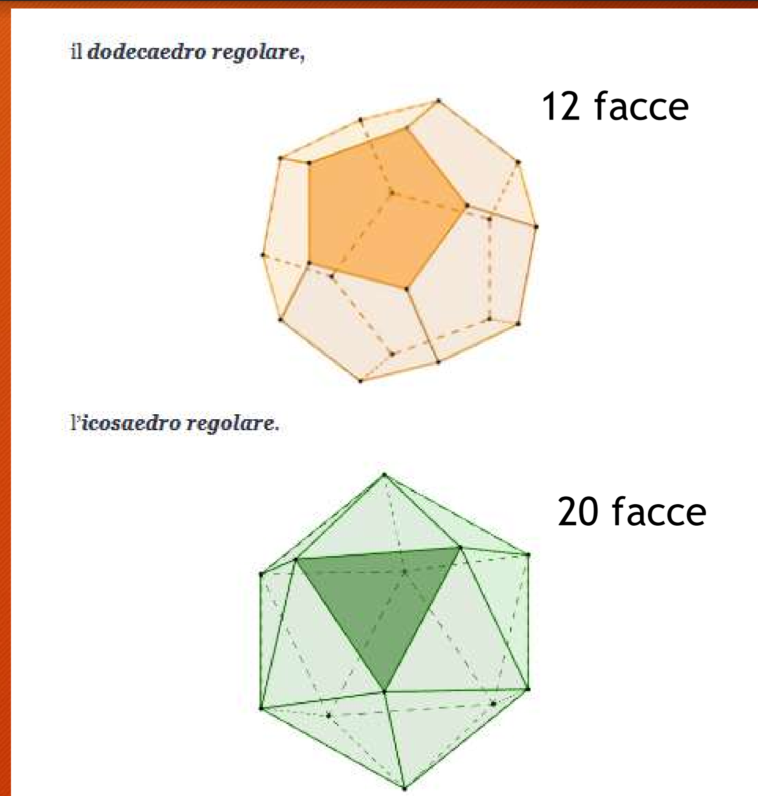
4) La Geometria Assoluta non contiene il V Postulato

5) Aggiungendo il V postulato alla Geometria Assoluta si ottiene la Geometria è Euclidea

6) Negando il V postulato e mantenendo valida la Geometria Assoluta si definisce la Geometria Iperbolica

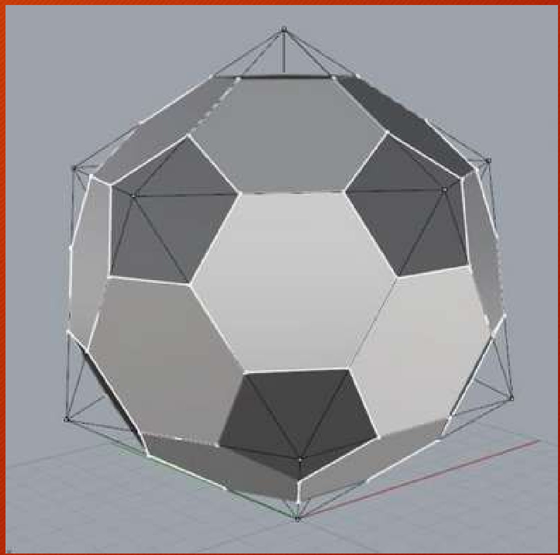
I Solidi Platonici: Sono solo 5!



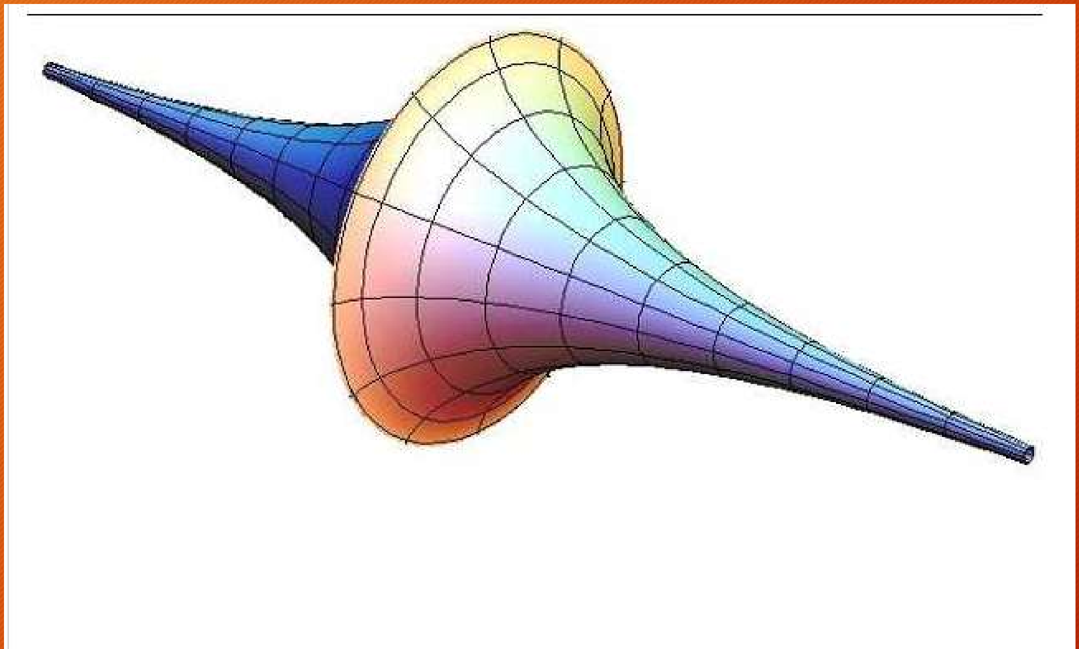


E il Pallone? 32 Facce!

Il Pallone non è formato da poligoni tutti uguali:
E’ formato da 20 esagoni e 12 pentagoni



Geometria Iperbolica.



La Pseudosfera di Eugenio Beltrami (Cremona 1835, Roma 1900)

E’ il primo modello di geometria iperbolica individuato dal geometra italiano nel 1868

Fine della V lezione

GRAZIE!